

Θέμα 1. [2 μον.]

(α) Δίνεται ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

προσδιορίζοντας παράλληλα και τις τιμές τους.

(β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{120}{x}$, $x > 0$. Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού, ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 6$.

Θέμα 2. [2 μον.] Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = 6 - \sqrt{15 - 2a_n}.$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα και να βρείτε το όριό της.

Θέμα 3. [2,5 μον.] Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + 240x$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και ότι η συνάρτηση f' (η παράγωγος συνάρτηση της f) είναι άρτια.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

(γ) Να εξηγήσετε γιατί η f είναι 1-1 και επί.

(δ) Παρατηρώντας ότι $f(-2) = -256$, $f(-1) = -203$, $f(0) = 0$, $f(1) = 203$ και $f(2) = 256$, να εξετάσετε αν η $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα σημεία -256 , -203 , 0 , 203 , 256 , υπολογίζοντας την παράγωγο της f^{-1} σε όσα από αυτά υπάρχει.

Θέμα 4. [2 μον.] (α) Να δείξετε ότι $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

(β) Να υπολογίσετε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$x_n = \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} \quad y_n = \sqrt[n]{n^3 + 4^n} \quad z_n = n^4 \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Θέμα 5. [1,5 μον.] Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $\phi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\sin(x)\phi(x) = x$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση ϕ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγό της σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. [Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την τιμή $\phi(0)$ και υπολογίστε την $\phi'(t)$, ξεχωριστά για $t \neq 0$ και για $t = 0$. Ομοίως για την ϕ'' .]

Καλή επιτυχία!